

Title	星の中の集団ダイナミクス：磁場揺動・磁極反転・脈動・スケーリング・・・(力学系の作る集団ダイナミクス：保存系・散逸系の枠組みを越えて)
Author(s)	森川, 雅博
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1827: 171-186
Issue Date	2013-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/194773
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

星の中の集団ダイナミクス —磁場揺動・磁極反転・脈動・スケーリング—

平成 24 年 12 月 16 日

森川 雅博 (お茶大)
hiro@phys.ocha.ac.jp

概要

多数の自由度が同期して秩序だった集団運動が自発的に生成する現象はいたるところで様々に観測される。宇宙においても例外ではない。しかし、天体特に星における、このような普遍的な構造は、微視的な基礎物理の論理のつなぎ合わせからの従来の理解の方法ではなかなか見えてこない。従来、こうした星の中の集団ダイナミクスは、磁気流体力学の大規模シミュレーションや、複雑な弾性体の持つ固有振動の重ね合わせとして個別に解析されてきた。これらは比較的短時間の観測的な特徴を再現することはできても、往々にして長時間にわたる特徴を導けなかった。これらに対して我々は、「星の中の多数の重要な部分要素が同期して集団自由度を作り、この同期を反映して、間欠性を持つ準周期運動を示す」という視点で一貫したモデルを作る。星の場合、保存力学系のモデルを立てても散逸系のモデルを立てても、集団運動は、静的な熱平衡状態でも単純なアトラクター吸引でもない躍動的で多様な様相を示す。特に、準定常状態に長時間捕獲された後、急に別の状態に遷移することもあり、これは地磁気を示す長時間に渡る間欠的な磁極反転履歴に見られる。星の中の集団ダイナミクスを題材に、集団運動にとって本質的な物理は何か、という問題を議論していきたい。

1 はじめに

地球が大きな双極磁石になっている、という話からはじめよう。その磁場は固定した不動のものではなく常に変動している。実際、現在行われている地磁気観測（例えば [1]）では、数分から数年、数百年にわたる磁気変動が観測されている。さらに長い時間尺度を見ると、地球は過去何億年にもわたってその極性の反転という大きな磁気変動を繰り返してきた（最初の発見は [2]）。しかもその 50 万年に一度の反転は千年程度で完結し、その間、地磁気が減少することなどがわかっている。図 1 に地磁気反転の履歴とそのパワースペクトルを示した。この、数分から数億年にわたる大きな時間スケールの地磁気の力学はいまだ統一的に解明されていない。

一方、地磁気を作り出す源となっている物理的機構はほぼ明らかになっている。地球内部の流体鉄核において、ダイナモ作用により磁場が形成される過程は電磁流体力学によって記述されると信じられている。実際これに基づいた大きな数値計算が試みられてきた [3, 4, 5]。そして特殊な場合には、地磁気反転などを部分的に再現できている。しかし多くのパラメータと膨大な数値計算結果の中に、多様な大スケールのダイナミクスがなぜ自然に出現するのか、その基本となる物理が埋没してしまっているように見える。

特に、大規模磁場が自然に出現するという状況は、地球に限らず、金星を除く惑星や木星の衛星、太陽をはじめとする大半の恒星にも観測され、普遍的な現象であることがわかっている [6]。しかも、その間欠的な磁場変動や反転なども、いくつかの恒星に伴うことなどがだんだんわかってきている。この普遍的な機構がいったいどこから来るのか、を追究するのがこの研究の出発点である。地磁気は多様で複雑な構造であってもその基本が普遍的な機構であれば、その本質は単純な力学で記述できるはずである。従って、その普遍的で単純なモデル [7, 8] をまず作ってみよう、というのがこの研究のはじめの課題である。

天体は、特徴的な磁場変動を示すだけではなく、その光度も変化させる。そして天体自身の全体的な活動性が準周期的に変動している。これは恒星に関して顕著で、大半の星は何らかの光度変化を伴っているようだ [9]。恒星

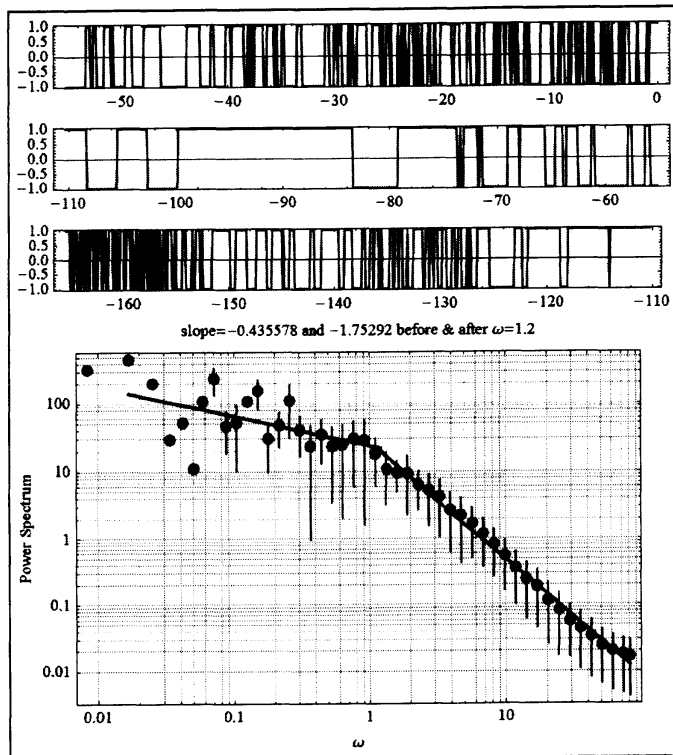


図 1: (上) 1 億 6 千万年以上にわたって地磁気はその極性を反転し続けてきた。その極性の長い時系列を 3 段に分けて描いた。単位は 10^6 年。縦軸の +1 は現在 ($t = 0$) の極性 (北極が S 極) を -1 は逆の極性をあらわす。
(下) この時系列のパワースペクトル。ほぼ 2 つの冪 (指数 -0.4 , -1.7) で特徴付けられる。

はその中心で核融合反応により大きなエネルギーを定常的に作り出しそれが星の中を外部に運ばれ、最終的に輻射や粒子・ガスとして宇宙空間に放出される。天体はこのような熱の流れを伴った非平衡状態にある。その熱エネルギーの流れが、こもったり、いったん磁場のエネルギーに変換されてから一気に放出されたりして、特徴的な時間変動を自律的に生み出している。惑星にも同様の構造がある。地球の場合には、沈み込む鉄がその重力エネルギーを開放し、それが熱エネルギーとして地球内部を通して外に運ばれる。究極的にはこの熱の流れが、対流・磁場などのエネルギーに転化しながら、地球の多様な活動性を作っている。

この話では、まず基礎方程式を概観し、それに基づく大規模数値計算から示唆される一般的なテイラー柱構造から、簡単な「結合スピンモデル」を提案する [7, 8]。それが地磁気変動に有効であることを見た後、モデルの物理的背景になっている、コア・ハロー構造と同期現象を力学系の広い視点から考察しよう。さらに、他の惑星や一部の衛星、星に対して、定量的に磁場を考察することで導かれるスケーリング則を基にして、テイラー柱サイズとその数を推測する。これを太陽に応用して、全く同じモデルがパラメータを変更すると太陽型の準周期的磁場反転を表現することを見よう。さらに、磁場変動だけでなく、恒星の準周期的光度変化（脈動）についても、「結合スピンモデル」の考え方は有効である。この考え方に基づいて、脈動の基礎物理をできるだけ直接的に反映するモデルを作り、多くの脈動変光星の持つ多様性が表現できることを見ていこう。最後に、磁場が宇宙にあまねく存在し、ダイナモ機構が普遍的な機能である事を考察してまとめよう。

2 基礎方程式

地磁気の場合、主体となるのは地球内部の流体鉄核であり、それを記述する基礎方程式は電磁流体力学の基本方程式である [3, 4, 5]。

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla \left(p - \frac{1}{2} \rho |\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 \right) + \rho \nu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \kappa_T \Delta T + \varepsilon_T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B}, \quad (3)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}, \quad (4)$$

これらは順に、自転効果（角速度 Ω ）、重力（ \vec{g} ）、ローレンツ力（電流 \vec{j} ）の加わったナビアストークス方程式（流体速度 \vec{v} ）、熱の発生（ ε_T ）と拡散の式（温度 T ）、電磁場を記述するマックスウェル方程式（磁場の拡散係数 η ）である。これらを適切な境界条件と適切なパラメータで解けば、地磁気のダイナミクスが完全に分かるはずである、とする要素還元主義は、なかなかうまくいかない。まず、固体鉄内核やマントルとの境界条件が不明だし、レイノルズ数 $Re \approx 10^8$ 、テイラー数 $Ta \approx 10^{28}$ 、リューレイ数 $Ra \approx 10^{16}$ という地球内部の実際のパラメータを実現することは技術的に難しい。さらに、たとえ磁場反転を含めて地磁気変動の時間発展が再現できても、なぜそのような特徴が出てくるのかという背後にある物理を引き出すのがまた困難である。このような場合に有効な物理の常套手段は、考察している系が持つ階層構造を考えることであろう。つまり、いきなり要素還元的にミクロからマクロを結びつけるのではなく、メソスコピックな中間階層構造を考えてみることである。地磁気の特性として、非常に大きな $Ta \approx 10^{28}$ から、対流が誘起され卓越している状態だろう。そして鉄核ではコリオリ力が支配的であり、Taylor-Proudman の定理から、回転軸に揃う傾向を持った渦構造ができるだろう。これがテイラー柱と呼ばれる円柱構造である。

ただし、単に渦があっただけでは磁場は変化しない；コリオリ力は仕事をしないから。磁場の発生・成長のためには渦の巻き込み、およびそれに伴う渦の伸長が重要である。これらはミクロにはバラバラに散在する磁場を集約しそれらの方向をマクロに揃え、増幅する。このような要件を満たす渦が、流体鉄核内のテイラー柱、反サイクロンであり、これは自転と逆向きの回転をする渦である。この反サイクロンと、自転向きの回転をするテイ

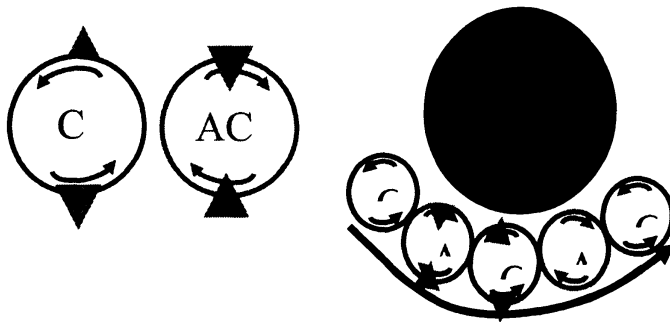


図 2: 地球の流体鉄核内で自転軸に沿った渦構造（テイラー柱）の模式図。すべて赤道面での断面図。（左）自転軸に沿って、自転（左回り）と同じ向きに回転するサイクロン（C）と反対向きの反サイクロン（AC）が交互に並んでいる構造が、数値計算などで明らかになってきている。（右）左の C、AC が固体鉄核（黒円盤）の回りに交互に並んでいる様子。AC は巻き込み渦で磁場を増幅し、C は振りほどき渦で磁場を増幅しない。数値計算では、テイラー柱は必ずしもきれいな円柱ではない場合もある。しかし、我々が注目するのはそれらにやわらかく巻きつく電流であり、テイラー柱形状は重要ではない。

ラー柱、サイクロンは自転軸に沿って流体鉄核内で交互に並んでいて、かなり安定な構造を作っている（図 2 参照）。しかし、これに巻きつく電流は、流体とは独立に振舞う。そして電流はもっと容易に変化する可能性がある。このことから、「地磁気は、テイラー柱構造に付随する局所的な電流と磁場が、他のテイラー柱に付随するそれらとお互いに相互作用しあって構成される」という仮説は自然だろう。地球内部の磁場を生み出すダイナモ機構は地球全体としての一つの機能ではなく、複数の部分ダイナモ要素の結合として記述しようという試みである。次に、このようなメソスコピックな中間階層構造をモデル化しよう。

3 地磁気変動の結合スピンモデルとその解析

地球磁場の発生と維持を記述する基本は電磁流体力学である。レイノルズ数 $Re \approx 10^8$ が非常に大きいので、流れの場は乱流であり、いたるところに渦構造が存在する。さらにテイラー数 $Ta \approx 10^{28}$ が非常に大きいので、地球の自転によるコリオリ力が卓越している。これは Taylor-Proudman の定理によって地球中心核の鉄流体領域に、自転軸にほぼ揃った大きな渦を作る。そのうち地球自転と逆向きの渦柱（反サイクロン）は伸長渦であり、乱雑に生成している磁場を縦方向に揃え増幅するダイナモの作用がある。つまり、ひとつの反サイクロンに付随する電流（及びそれが作る磁場）はマクロなスピンに対応し、ダイナモ作用を持った地磁気の基本要素となるだろう。このマクロスピンの、磁気生成には重要でない順渦をはさんで円環状に並んだ構造ができる（図 3 参照）。このマクロスピンはベクトルであり、 i 番目のスピンの角度変数を θ_i として $\vec{s}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) が基本変数となる。

これらのマクロスピン達を作る逆渦（反サイクロン）は、順渦（サイクロン）をはさんで並んでいるので、その流れは平行であるのが安定である。もしマクロスピンの作る磁場もこの流体的作用が効くのであれば、同様に揃う傾向にある。それとともに、スピンは Taylor-Proudman の定理によって自転軸に揃おうとする傾向もある。従ってポテンシャルは $\lambda > 0$ として $V \equiv \mu \sum_{i=1}^N (\vec{\Omega} \cdot \vec{s}_i)^2 + (\lambda/N) \sum_{i < j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$ とかける。もっとも自然な運動項を変数の時間微分の 2 次形式であるとして、この系のラグランジアン $L = K - V$ が作られる。つまり、

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{s}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i^2, \quad V = \mu \sum_{i=1}^N (\Omega \cdot \vec{s}_i)^2 + \frac{\lambda}{2N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad (5)$$

である。運動方程式は、

$$\frac{d(\partial L / \partial \dot{\theta}_i)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \quad (6)$$

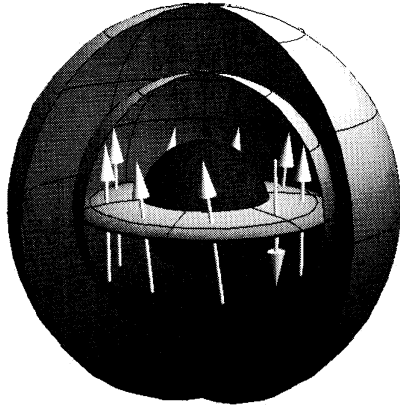


図 3: 結合スピンモデルの模式図。流体鉄核内で、各テイラー柱に巻きつく電流やそれによって生成される局所磁場をひとつのマクロスピン（矢印）と考えて、これらの結合で地磁気全体が構成されるとするモデル。スピンたちは中心の固体鉄核（黒い球）を取り囲んでいる。すべてのスピンが揃うわけではなく、逆向きスピンも存在する。これは、しばしば核・マントル境界に出現し速く変動する反磁束斑ペアをあらわすだろう。

($i = 1, 2, 3, \dots, N$) となる。これは 2 パラメーターだけの地磁気の最小モデル [8] である。また、系全体の基調を決める重要なパラメーターとして、平均場

$$M \equiv \frac{1}{N|\vec{\Omega}|} \sum_{i=1}^N \vec{\Omega} \cdot \vec{s}_i \quad (7)$$

を考えることができる ($-1 \leq M \leq 1$)。これは自転軸方向にすべてのスピンがどの程度揃っているかを表す指標であり、地球磁場の定常でマクロな成分を表現する。この符号の逆転が起これば、それは磁極反転を表す。 M が揃った大局的集団を表すマクロ変数なら、各スピン変数 \vec{s}_i は局所的磁場を表す個別変数である。

ちなみに、地磁気現象は散逸的な過程なのでそれをあからさまにあらわす散逸・揺動項 $-\kappa\dot{\theta}_i + \xi$ を、運動方程式 6 の右辺に付加することもできるだろう。さらに散逸的極限をとって時間 1 階の微分方程式に変形することもできる。しかし、このように変更しても、以下の解析にはほとんど影響がない [7]。地磁気のランダムな振る舞いは、保存系の記述 (式 6) の中に既にあるからである。以下では、この最小モデルを考えていこう。

このモデル (式 6) は簡単に数値計算できて、初期条件によらずに地磁気の特性を再現する種々の様相を呈する。ただし、初期条件で決まってしまう保存エネルギーの値だけは重要なパラメーターであって、系の振る舞いを変えてしまう。この点は太陽の場合に再び議論しよう。

まず、平均場 M の時間変化は図 4 (上) のようになる。磁極反転頻度を観測値と整合させると、時間尺度が決定し、計算における時間 1 はおよそ 3100 年に相当する。また、磁極反転が完結する平均的な時間はおおよそ 1500 年 (観測では数千年)、反転と反転の間の定磁極の期間は $0.3\text{--}4 \times 10^6$ 年 (観測では $0.1\text{--}6 \times 10^6$ 年)、などとなる。

この計算から、長い定磁極の時期と速い磁極の反転の特性が顕著である。磁極がほとんど反転しそうになって急に反転を取りやめる状況 (excursion) もたくさん見受けられる。これらは非常に間欠的である。この時系列のフーリエスペクトル (図 4 (下)) をもとめると、2 つの幕で表されるものとなる。これは長時間にわたって記憶が残っていることを表している。

一方、千年ほどの短い時間尺度においても、平均場 M は細かな変動を示す。そしてこの同じ短い時間スケール程度で、磁極の反転が完結する。図 5 がこのことを表している。さらにこの図 5 (下) から、磁極反転時に双極磁場が消えて四重極磁場が現れることなどもわかる。

さらに、 M がとる値の頻度分布を表したのが図 6 である。長時間磁極一定状態が継続し、急激に反転することが推測される。

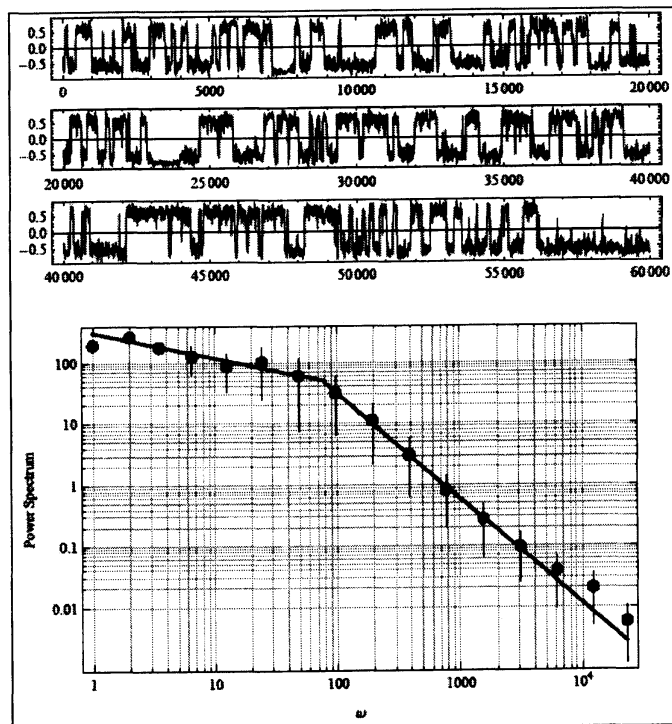


図 4: (上) 平均場 M の時刻変化。 $N = 9$ の計算。細かな変動は常にあるが、長い磁極一定期間の後に、急激に時間反転する様子が伺われる。(下) 上の時系列のパワースペクトル。ほぼ 2 つの冪 (指数 -0.4 , -1.7) で特徴付けられる。これらの特徴は実際の地磁気変動を良く再現している。

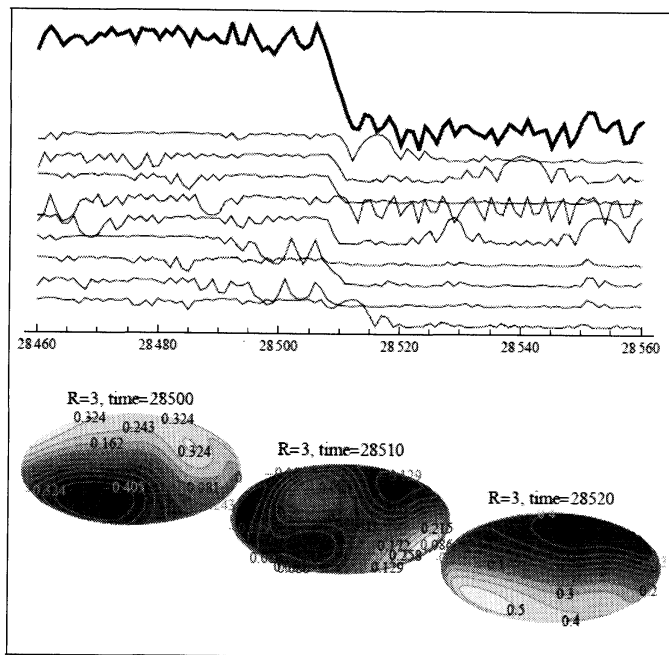


図 5: (上) 平均場 M (太線) の符号が変わり磁極反転する時系列。(中) 細線たちはこのときの各スピンの時系列。上から 6, 8 番目の活動的なスピン (ハロースピン) が共同してコアに作用し反転を促したと推測される。反転後はこれらスピンのコア成分として捕捉され、代わりに 4 番目のスピンがコアから飛び出しハローの役割を担う。(下) この磁極反転時の鉄核・マントル境界付近の磁場の様子をモルワイデ図法で表した。左は反転直前、中央は反転中、右は反転直後。反転中は全体に磁場が弱くなり、4 重極配置が現れる。

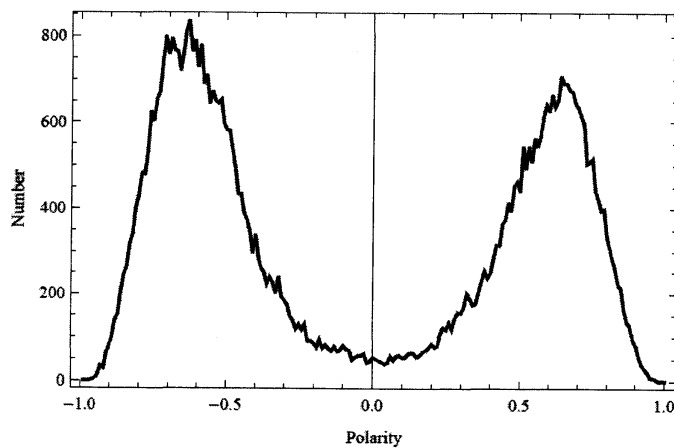


図 6: 平均場 M の頻度分布。左・右のピークはそれぞれ逆・順の極性を示す。その間の深い谷は、磁極反転が素早く完結していることを示す。

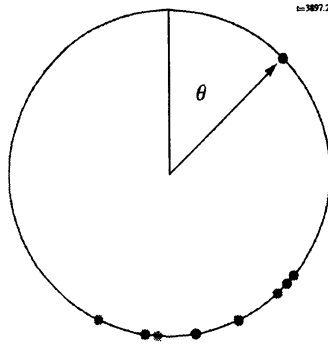


図 7: 各スピン変数の配位角度 θ_i (点) をある時刻 $t=3897.2$ にスナップショットで表示した。このとき、ほとんどのスピンは自転軸と反平行で、これは平均場 M の主要成分を作る (コア)。一方右上の 1 つのスピンは全周を速く変動する成分 (ハロー) である。コアに「衝突」し、ハロー成分は頻繁に入れ替わる。そしてごくまれにコアの反転 (磁極反転) を素早く引き起こす。

4 スピンモデルの物理的背景

この地磁気の結合スピンモデルは保存系である。それにもかかわらず、地磁気の不規則な揺らぎや間欠的な磁極反転をうまく表現する。その理由は、このスピンモデルが、多体系の集団運動の基本的な二つの側面をとらえているからである。

第 1 の側面は、HMF モデル (=Hamiltonian Mean Field model)[10] との類似であり、長距離相互作用することである。我々のスピンモデルには、HMF には無かった自転軸に揃うようにするポテンシャル (式 (5) の V 第 1 項) が付加されているだけである。両者はともにコア・ハローの二相共存構造を作ることが本質的である。コアは変数値の密集した比較的安定な集団であり、地磁気であれば定常部分である大局的双極磁場を作り、変数が疎で速い変動を示すハローは、地磁気であれば局所的な変動成分を作る。前者は後者の影響をランダムに受けて間欠的に急激な磁極反転を引き起こす。

図 7 には、もっとも自転軸に沿った角度から測ったすべてのスピンの配位角 θ_i , ($i = 1, 2, \dots, N$) の、ある時刻における典型的なスナップショットを示している。この時刻にはほとんどのスピンは自転軸に反平衡に配位し、大きな下向きの双極磁場を作る。一方、たいていこの集団から外れた少数の個別スピンがあって、これは移動速度の速い地磁気の変動成分を作る。時間発展を観察すると、この個別スピンは集団の中に入り、時々別の個別スピンをたたき出し自身は集団にとどまる。このような「衝突」を繰り返すうち、ごくまれに、集団の配位を反転させるときがある。この反転は個別スピンの移動速度と同程度のごく短い時間に起こり、これが地磁気磁極反転の速いプロセスを再現している。この磁極反転はまったく周期的ではなく間欠的である。

HMF モデルも我々の結合スピンモデルも、保存するエネルギーが、系の相を決める重要なパラメータである。実際、エネルギーが大きいとすべてがハロー成分となり、集団運動は見られない。ある臨界エネルギー付近以下ではコア・ハローが共存する。スピン数 $N \rightarrow \infty$ の滑らかなときにはこれは相転移の存在を示すが、地磁気の場合には有限でしかも数値 $N \approx 9$ も大きくないので、この臨界値は不明瞭で、転移は滑らかである。

第 2 の側面は、蔵本モデル [11]

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad (8)$$

との類似であり、引き込み (同期) 現象を記述することである [12]。両者とも同じ変数 θ_i , ($i = 1, 2, \dots, N$) で記述され共通の大域的サインポテンシャルを持ち集団化現象を記述する。そして同期して集団化したスピンたちが大局的双極磁場に対応する。

蔵本モデルは時間の1階微分方程式で、個別には線形のポテンシャルを持つ。結合スピンモデルは時間の2階微分方程式で、個別にも自転軸に揃うようにする非線形ポテンシャル(3)(式(5)のV第1項)を持つ。この違いによって、前者はリミットサイクルとして漸近する周期的運動を、後者は間欠的な運動となる。後者においてもし変数 N が大きかったり個別のポテンシャルが低ければ、星の磁場はより周期的なものに近くなると考えられる。これは太陽の磁場に対応するので後ほど議論する。

両モデルは、ミクロな個別要素がお互いの位相を揃えてマクロなリズムを生み出す物理を簡潔に表現する。ただ単にマクロ集団化するだけでなく、リズムを持ちその位相が揃っていく物理が重要なのである。それに加えて、そのマクロ位相が間欠的であったりあるいは準周期的であったりするような、特徴的で多様な揺らぎを生み出す物理が重要なのである。これらは散逸系におけるリミットサイクルあるいはストレンジアトラクタ的でもあるし、保存系におけるカオス的遍歴現象の様相も持つ。このように散逸系・保存系の別なく、多自由度系がその位相を揃えて自発的にミクロから多様なマクロ構造を構成していく過程は、宇宙においても普遍的で基本的な現象であろう。

5 他の惑星、太陽の場合

我々の導入した結合マクロスピンモデルが普遍的であるとすれば、同様な磁場を作るほかの惑星においても、適用できるはずである。電磁流体力学の基礎方程式に戻って、スピンモデルのスケールを導入すると、流体速度や生成磁場と星のサイズとの間にあるスケーリング関係が導出できる。これを用いて、マクロスピンの数やサイズを推測することができる。

実際、定常的な状況で式(3)を使うと、流体速度

$$v \approx (\gamma \mu_0 \sigma R_c)^{-1} \quad (9)$$

が得られる、ここで、 γ はテイラー柱のサイズと核サイズ(R_c)の比である。 σ は核の電気伝導度である。また、式1において、卓越するコリオリ力と磁気圧力の釣り合いから、外殻内部における磁場は

$$B_{in} \approx (2\rho_0 \Omega v \mu_0 \gamma R_c)^{1/2} \quad (10)$$

となる。ここで、 ρ_0 は核の質量密度である。これらと磁束密度の保存から、地表での磁場は

$$B_{out} \approx \left(\frac{R_c}{R}\right)^2 \left(\frac{2\rho_0 \Omega}{\sigma}\right)^{1/2} N \gamma^2 \quad (11)$$

となる。ここで、地球半径 $R = 6357 \text{ km}$ 、核半径 $R_c = 3480 \text{ km}$ 、電気伝導度 $\sigma = 3 \times 10^5 \text{ Siemens/m}$ などを入れると、

$$B_{out} = 0.4 \times 10^{-4} \text{ Tesla}, v = 7.6 \times 10^{-6} \text{ m/sec} \quad (12)$$

が得られ、観測値に近い。

一方、式11を双極磁場モーメント

$$d \equiv B_{out} R^3 \quad (13)$$

の形で、いろいろな惑星の磁場と質量をプロットしてみると、図8のようになる。

すると、この図からきれいなスケーリングが読み取れる。

$$N \gamma^2 \propto M^{1/2}. \quad (14)$$

この関係式は惑星の磁場が共通の物理的背景を持っていることを強く示唆している。更に、マクロスピンのスケールや数に関して有用な情報を与える。例えば、 γ が一定なら、地球の場合に $N = 9$ であったので、太陽の場合 $N = 5 \times 10^3$ であることが分かる。

さてその太陽の場合、磁場の変動は太陽活動と強く相関していて、放射エネルギーや黒点数が最大の最活動時期に、太陽の双極磁場の極性が反転する。従って、黒点数などの太陽活動は磁場変動の良い指標となる。その黒

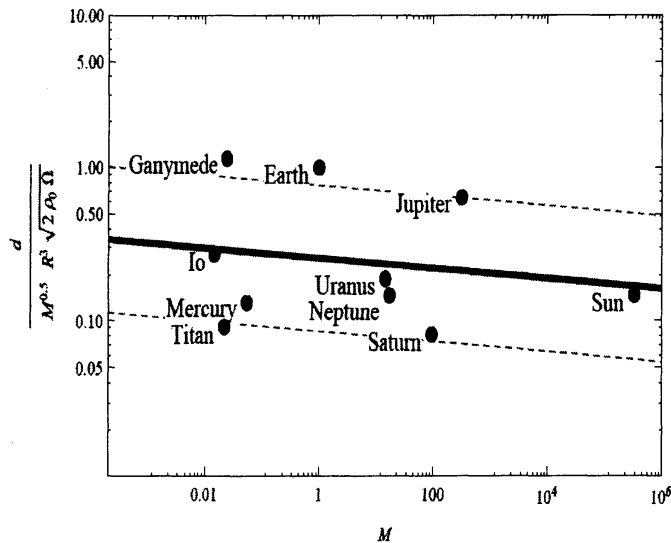


図 8: 惑星・衛星・太陽の、規格化 (因子 $M^{1/2}$) した磁気双極子モーメントは、8 桁にわたる天体の質量によらずほぼ一定である。これが磁場のスケールリングを与える。

点数変化を表したのが図 9 である。これから太陽磁場は、地球の場合と違って、準周期的な振る舞いをするのと、全体として周波数の逆数に近い冪則を示すこと ($1/f$ 揺らぎ) などが読み取れる。

上のスケールリング則から、太陽磁場の場合は、数千個の結合スピンモデルに対応することが分かるので、全く同じモデルでスピン数 N を変えて解析してみよう。スピン数 N はスピンの結合係数の中にも入っているので、自動的にこの結合の強さも変更することになる。その計算結果を図 10 に示した。

地磁気を説明する同じ結合スピンモデルが、太陽のほぼ 11 年の準周期的活動や大きな変調など、太陽磁場に特有の磁場変動を記述する。特に、太陽活動の持つ $1/f$ 揺らぎはこのモデルから再現できる。

6 変光星への一般化

太陽の磁場は、太陽の全体的な活動性 (黒点数、放射エネルギー) と強く連動している。つまり、太陽活動最大時に磁極反転が起こり、活動最低時には双極磁場は最大になる。太陽はごく一般的な星なので、他の恒星においても、その活動性とともに関係が連動して変動していると考えられるのは自然である。したがって、同様の結合要素モデルが他の星にも適用できると考えられる。特に、準周期的な活動を顕著に示す脈動変光星 [9] はまさにこの範疇である。星の内部からの熱輸送に関して、輻射の卓越するセファイド型変光星と対流の卓越するミラ型変光星に分けて、結合要素モデルを発展させて統一的に解析しよう。

100 年以上続いてきた変光星研究は、星全体の固有振動モードを重ね合わせて星の変光プロファイルを記述する線形解析が主眼であった。一方我々は、はじめから非線形非一様の多要素結合モデルを出発点にし、それら要素の同期として星全体の脈動現象を扱う。前者が (全体から部分へという) トップダウンなら、後者は (部分から全体へという) ボトムアップの記述であり、お互いに相補的である。前者においては、多数ある不規則変光星はあまり真剣に考察されてこなかったが、後者の記述では、それをすべて含めて変光星の多様性が要素の同期の強さの違いという形で統一的に記述できることを示す [14]。

さて、輻射が熱輸送を卓越する星の場合、ヘリウムが電離すると輻射に対して不透明になり輻射を制動することと、さらにこの電離・再結合反応がもたらす非断熱性が、自励する脈動の本質である (κ -機構)。星を取り巻くように部分要素たちを 2 次元空間上に配置して (つまり、 r_{ij} , ($1 \leq i, j \leq N$)), 隣接要素ごとに結合させるモデ

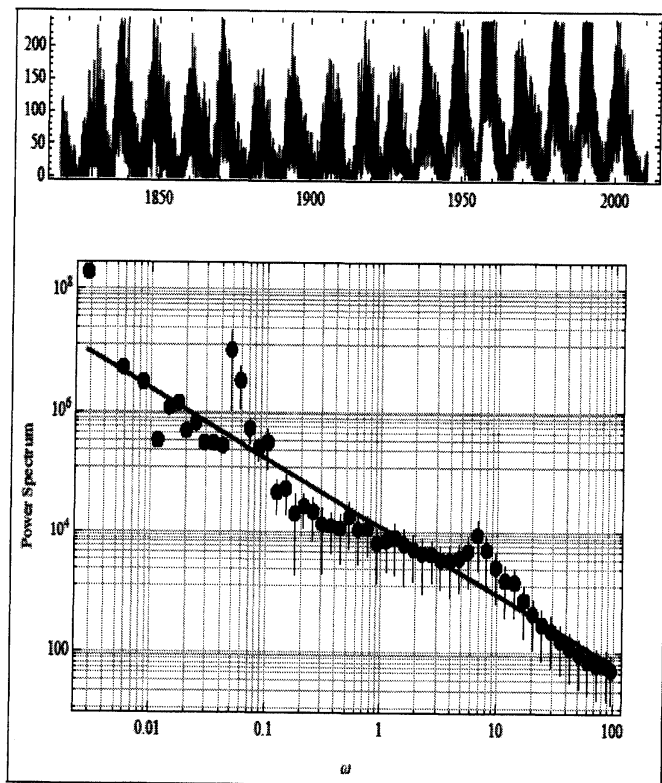


図 9: (上) 太陽黒点数の時系列。横軸は西暦年。これは太陽活動、太陽磁場の良い指標である。地球の場合と違って、準周期的な振る舞いをする。(下) その時系列のパワースペクトル。ほぼ 11 年周期を示すピークと、全体として周波数の逆数に近い冪則を示す。ちなみに周期 1 ヶ月ほどの別のピークは、太陽自転による見かけの黒点数変化である。データは [13] から。

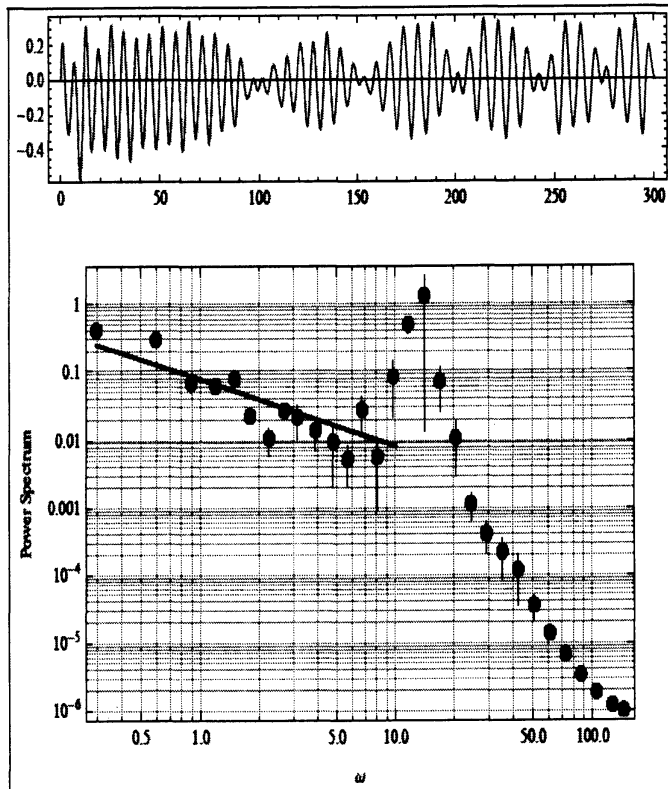


図 10: (上) 数値計算による磁場の強さ M の時系列。 $N = 1000$ とした。大きな変調を伴った準周期的な振る舞いを示す。(下) その時系列のパワースペクトル。11 年周期に対応するピークとともに、その低周波側に周波数の逆数に近い冪則を示す。残念ながら高周波領域ではそのような傾向は見えない。

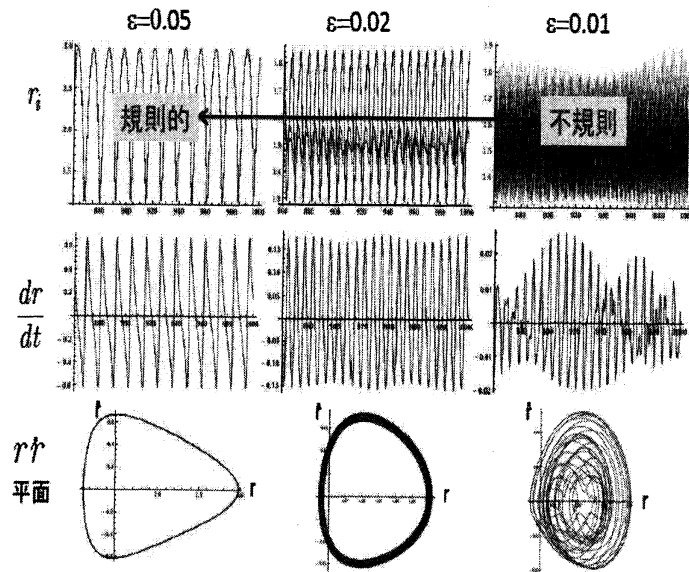


図 11: κ 機構による脈動モデルの計算結果。上、中央、下の各行は、星の半径、その時間変動速度、そしてこれらのリサージュ図形。左、中央、右の列は規格化した結合定数をこの順に弱めた結果で、この順に不規則化し、振動の変調が大きくなる。[14] から。

ルを考える。動径変数の時間変化は

$$\frac{d^2 r_{ij}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial r_{ij}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r_{ij}} + \frac{\kappa L}{4\pi c r_{ij}^2} + \varepsilon(r_{i+1,j} - 2r_{ij} + r_{i-1,j}) + \varepsilon(r_{i,j+1} - 2r_{ij} + r_{i,j-1}) \quad (15)$$

と書ける。ここで、重力ポテンシャル

$$V = -\frac{GM}{r_{ij}}, \quad (16)$$

は星全体の質量 M で決まるとする。圧力は、断熱因子 γ を用いて

$$P = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-3\gamma} \frac{c}{\rho_0} r_{ij}^{-3\gamma} \quad (17)$$

である。また、 κ は透明度であり、 L は星の光度である。ヘリウムの電離・再結合の非断熱過程を簡潔に表現するために、

$$L \propto \frac{dr_{ij}}{dt} \quad (18)$$

と置く。これを無次元に規格化し $t \rightarrow \bar{t} = t\sqrt{G\rho_0}$, $r \rightarrow \bar{r} = \frac{r}{r_0}$ 、(簡単のために) 周期境界条件を課してこの連立方程式を解けばよい。この結果を図 11 に示す。星の光度は、温度が最大になる r_{ij} 最小付近で最大になる。規格化した結合の強さ ε を順次強めていくと、不規則から半規則、規則的な脈動に変化する。 ε は星の密度 ρ に反比例するので、これら一連の変光プロファイルの移り変わりは、セファイド型脈動変光星の表面重力を順次弱めていくことに対応する。実際、結合モデルの示す様々な変光プロファイルはセファイド型脈動変光星のそれを定性的に再現する。

一方、ミラ型の対流に起因する脈動機構の場合には、現在のところ対流を簡潔に記述する理論が無いので、それを最も簡潔に象徴するローレンツモデルを用いよう。 x は流速、 y と z は、それぞれ水平方向、垂直方向の温度差を表す。これを 2 次元に並べて隣接する要素を結合させる。

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -10(x_{ij} - y_{ij}) + \varepsilon(x_{i+1,j} - 2x_{ij} + x_{i-1,j}) + \varepsilon(x_{i,j+1} - 2x_{ij} + x_{i,j-1}) \quad (19)$$

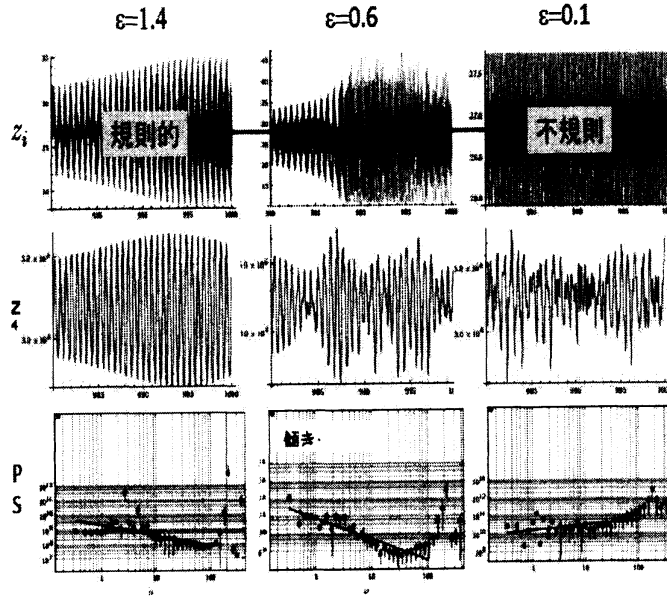


図 12: 対流による脈動モデルの計算結果。ローレンツモデルを結合させた。上、中央、下の各行は、温度に相当する変数 z 、その光度に相当する z^4 、そしてこれのパワースペクトル。左、中央、右の列は結合定数をこの順に弱めた結果で、この順に不規則化し、振動の変調が大きくなる。[14] から。

$$\frac{dy_{ij}}{dt} = -x_{ij}z_{ij} + 28x_{ij} - y_{ij} \quad (20)$$

$$\frac{dz_{ij}}{dt} = x_{ij}y_{ij} - \frac{8}{3}z_{ij} \quad (21)$$

ここで考えているのは対流なので、隣接する各要素対流は流速をそろえるように結合した。星の光度は $\sum_{ij} z_{ij}^4$ に比例するとする。これも κ -機構のときと同様に解いた結果、図 12 のようになる。やはり結合の強さ ϵ を増大させていくと、不規則から半規則、規則的な脈動に変化する。これもミラ型変光星が示す一連の変光プロファイルを定性的に再現する。ここで、特に半規則的な場合、光度変化のパワースペクトルが、準周期を示すピークとともに、低周波のほうで -1 に近い冪を示すことが見出される。これは太陽の黒点数変化の場合にも見られたもので、一般の脈動星に関しては [15] に報告がある。

この冪的な揺らぎがどれだけ一般的かは今後系統的に調べる必要があるが、少なくとも $N \approx 2$ では、一見複雑に見える光度曲線を再現しても、この冪的様相は見えない。

7 まとめ

地磁気の持つ多時間尺度の多様なダイナミクスを記述する結合スピンモデルを構築した。地磁気の源とされる流体鉄核は、コリオリ力が卓越した非散逸的な状態にあり、自転軸に沿う傾向を持ったいくつかの渦柱が固体鉄核を取り囲んでいる。自転と逆向きの渦は巻き込み渦なので磁場をそろえて増幅する。これがダイナモ機構の要素であり、我々はこの局所磁場をひとつのマクロスピンと同定した。そしてこれら複数のスピンを結合させて、最小の力学系モデルを作った。これが結合スピンモデルであり、地磁気のいろいろな観測結果を再現した。おそらく地磁気ダイナミクスの骨格をうまく取り出せていると考えられる。

また、基本である電磁流体力学の式に立ち返り、他の惑星・衛星・太陽の磁場が示すスケーリング則を導き、これを基にして要素ダイナモのサイズや数を推測した。太陽の場合には要素数が数千と得られるので、まったく同

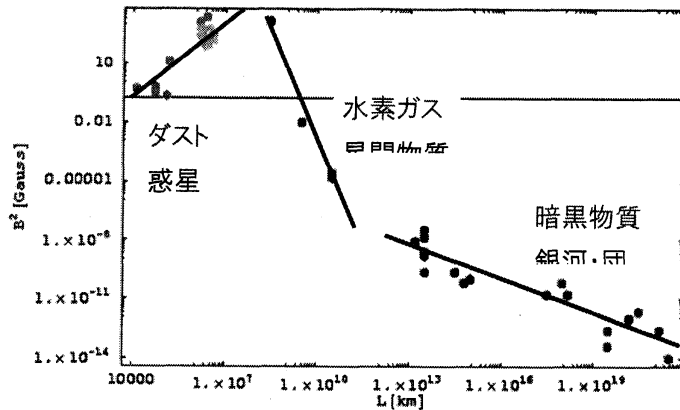


図 13: 宇宙に遍く存在する磁場。17 桁にわたるスケールの様々な宇宙の構造に対して付随する磁場を図示した。磁場は 3 群に分けられる。小さいスケールから、第 1 群は惑星であり、主成分はダストである。第 2 群は星間物質であり、主成分は水素ガスである。第 3 群は銀河・銀河団であり、主成分は普通の物質と暗黒物質である。それぞれの群ごとに異なる指数の冪的な振る舞いをする。データは [16, 17] から。

じモデルで要素数を増やして計算した。すると、今度は準周期的な磁場変動と $1/f$ 揺らぎを持つパワースペクトルが得られ、太陽磁場の持つ特性を定性的に再現した。

太陽の場合、磁場変動と星の活動性が強く連動しているので、結合スピンモデルを拡張して、もっと一般の変光星の多様な光度曲線を解析した。輻射優勢のセファイド型変光星の場合はヘリウム電離・結合に伴う非断熱性を表現する正負の摩擦係数を持った力学系を結合させた。対流優勢のミラ型変光星の場合は、対流を象徴するローレンツモデルを結合させた。どちらの型でも、結合定数の増加に応じて、光度プロファイルが規則化し、多様な光度プロファイルを統一的に記述する。

結合スピンモデルは 2 つの物理的背景を持つ。1 つは長距離相互作用系の持つコア・ハロー構造であり、これらはそれぞれ地磁気の定常双極成分・局所的に速く変動する成分に対応する。もう 1 つは、多数の要素の同期（協同現象）である。これは太陽の場合の準周期的変動をつくる。保存系・散逸系を問わず自由度系の同期あるいはコア・ハロー構造化は、マクロ構造形成一般の基本であると考えられる。

最後に、宇宙では磁場、あるいはそれを作り出すダイナモ機構が非常に普遍的であることを指摘したい。星だけでなく、銀河・銀河団も同様であるらしい。プラズマで満ちている銀河は、やはりダイナモ作用によって自発的に磁場を作り出している。図 13 に、磁場の大きさと天体のスケールの相関を描いた。主たる構成要素に応じて 3 群の構造があるようだ [16, 17]。我々が今回考察したのはこのうち惑星・星の群の磁場に過ぎない。残りの群に関しても物理的背景を考えた考察を進めるべきであろう。

参考文献

- [1] Kakioka Magnetic Observatory Japan Meteorological Agency, <http://www.kakioka-jma.go.jp/en/index.html>.
- [2] Matuyama M., 1927, Japanese Journal of Astronomy and Geophysics, 4-3, 121
- [3] Kageyama A., Sato T., 1997, Physical Review, E55, 4617. Kageyama A., Miyagoshi T., Sato T., 2008, Nature, 454, 1106
- [4] Kida S., Kitauchi H., 1998, Prog. Theor. Phys., 130, 121

- [5] Kono M., Roberts P., 2002, *Rev. Geophysics*, 40, 4-1. Korte M., Holme R., 2010, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 182 179
- [6] 桜井 隆・小島 正宜・柴田 一成 編, 現代の天文学 太陽, シリーズ 現代の天文学 10 日本評論社 (2009).
- [7] Mori N., Schmitt D., Ferriz-Mas A., Wicht J., Mouri H., Nakamichi A., Morikawa M., 2011, submitted. *Astro-ph preprint arXiv:1110.5062*.
- [8] A. Nakamichi, H. Mouri, D. Schmitt, A. Ferriz-Mas, J. Wicht, M. Morikawa: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 423, 2977 (2012).
- [9] 竹内峯, 変光星ノート, <http://www.nhao.jp/~ishida/Takeuti/YLNS-VS10a.pdf>
- [10] Campa A., Dauxois T., Ruffo, S., 2009, *Phys. Rep.*, 480,57.
- [11] Kuramoto Y., 2003, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Dover Publications.
- [12] Arkady Pikovsky et al. 徳田 功 訳, 同期理論の基礎と応用, 丸善 (2009).
- [13] SIDC, 2011, <http://sidc.oma.be/> daily sunspot numbers from 1812.
- [14] Takahashi S., Morikawa M., in preparation (2012).
- [15] L. L. Kiss et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 372, 1721-1734 (2006)
- [16] J.P. V´al´ee, Detecting the largest magnets: The universe and the clusters of galaxies, *Astrophys. J.* 360 (1990) 1.
- [17] J.P. Vall´ee, Magnetic field versus gas density, in different physical conditions, *Astrophys. Space Sci.* 234 (1995) 1.